UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 ABRIL-JULIO DE 2006
tercer examen parcial (40%)
11-07-2006

TIPO B

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.- Calcule las siguientes integrales :

a)(10 ptos.) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$; **b)(5 ptos.)** $\int x.\sec^2(x)\,dx$;

c)(5 ptos.) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}\,dx$; **d)(5 ptos.)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$.

2.-(5 ptos.) Calcule el siguiente límite : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ \mathrm{sen}(x)\ )^x$.

3.- (10 ptos.) Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana limitada por las dos curvas de ecuaciones : $y = 2x^2$, $y = 2x$ gira alrededor de la recta de ecuación $y = 3$.

3a) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;

3b) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;

3c) (2 ptos) Calcule el volumen [con el método que Usted prefiera].

S O L U C I O N E S

a)(10 ptos.) I_a = $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$;

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C+Dx}{x^2+1} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(C+Dx)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \Rightarrow$$

$A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(C+Dx)(x+1)^2=$
$= A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(C+Dx)(x^2+2x+1)=$
$= (A+D)x^3+(A+B+C+2D)x^2+(A+2C+D)x+(A+B+C) = 0+1.x+0x^2+0x^3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A+D = 0 \\ A+B+C+2D = 0 \\ A+2C+D = 1 \\ A+B+C = 0 \end{cases}$$ además, como $x = -1 \Rightarrow 2B = -1$, se tiene : $B = -\frac{1}{2}$;

$\begin{cases} A+B+C+2D = 0 \\ A+B+C = 0 \end{cases} \Rightarrow D = 0$; $\qquad \begin{cases} A+D = 0 \\ D=0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$;

$A+B+C+2D = 0 \Rightarrow C = -A -B -2D = 0 +\frac{1}{2} -0 = \frac{1}{2}$, por lo cual se tiene :

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{-1/2}{(x+1)^2} + \frac{1/2}{x^2+1} \ ,$$

$$\mathbf{I}_a = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \right] = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2(x+1)} + K.$$

b)(5 ptos.) $\mathbf{I}_b = \int x.\sec^2(x)\,dx$; integremos "por partes" con $u = x$, $v' = \sec^2(x)$:

$\mathbf{I}_b = x.\tan(x) - \int \tan(x)dx = x.\tan(x) + \ln|\cos(x)| + K$.

c)(5 ptos.) $\mathbf{I}_c = \displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}dx$; pongamos $u = x^2$. Entonces :

$$\mathbf{I}_c = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4u+3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2-1}} = \operatorname{arccosh}(u+2) = \ln\left| u+2+\sqrt{(u+2)^2-1} \right| =$$

$$\ln(x^2+2+\sqrt{x^4+4x^2+3}) + K .$$

d)(5 ptos.) $\mathbf{I}_d = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$. [**ojo : es una integral impropia**] .

$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$; $x = 1 \Rightarrow C=1$;
$x= A(x^2-2x+1)+B(x-1)+C = Ax^2+(B-2A)x+(A-B+C) = 0x^2+1.x+0 \Rightarrow A=0$;
$B-2A=1 \Rightarrow B= 1+2A = 1$. Por lo tanto se tiene :

$$\mathbf{I}_d = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right)dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} \right]_2^b = \frac{3}{2} \ ;$$

La integral impropia dada es convergente y su valor es $\frac{3}{2}$.

[**Nota** : una manera más rápida de calcular la integral indefinida es por sustitución con u=x-1]

2.-(5 ptos.) $\lim_{x\to 0^+} (\ \mathrm{sen}(x)\ )^x = L$; $\ln(L) = \lim_{x\to 0^+} (\ x.\ln(\mathrm{sen}(x))\ ) =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(\mathrm{sen}(x))}{1/x} \right) \underset{(\text{Hopîtal})}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos(x)/\mathrm{sen}(x)}{-\ 1/x^2} \right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\cos(x) \frac{x^2}{\mathrm{sen}(x)} \right) = 0 \ ;$$

por lo tanto $L = e^0 = 1$.

3.- (10 ptos.) Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana limitada por las dos curvas de ecuaciones : $y = 2x^2$, $y = 2x$ gira alrededor de la recta de ecuación $y = 3$.

3a) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;

Con referencia a la figura #3 se tiene : $V = \pi \int_{x_O}^{x_A} (R^2 - r^2)\, dx$,

con $R = 3 - 2x^2$; $r = 3 - 2x$; $x_O = 0$, $x_A = 1$, ya que el punto de intersección de la recta con la parábola, distinto del origen, es A(1, 2) ;

Por lo tanto $V = \pi \int_0^1 [(3 - 2x^2)^2 - (3 - 2x)^2]\, dx$.

3b) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;

Con referencia a la figura #4 se tiene : $V = 2\pi \int_{y_O}^{y_A} (x_2 - x_1) r\, dy$, con $x_1 = \frac{y}{2}$, $x_2 = \sqrt{\frac{y}{2}}$,

$r = x-(-1) = x+1$, $x_O = 0$, $x_A = 1$, $r = 3 - y$, por lo cual se tiene :

$$V = 2\pi \int_O^2 \left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{y}{2} \right) (3 - y)\, dy \ .$$

3c) (2 ptos) Calcule el volumen [con el método que Usted prefiera].

3ca) Calculando el volumen con el método de discos y/o arandelas se tiene :

$$V = \pi \int_0^1 [(3 - 2x^2)^2 - (3 - 2x)^2]\, dx = \pi \int_0^1 (4x^4 - 16\, x^2 + 12x)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{4}{5} x^5 - , \frac{16}{3} x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = \frac{22}{15}\pi \ .$$

3cb) Calculando el volumen con el método de los cascarones se tiene :

$$V = 2\pi \int_O^2 \left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{y}{2} \right) (3 - y)\, dy = 2\pi \int_O^2 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} y^{1/2} - \frac{3}{2} y - \frac{1}{\sqrt{2}} y^{3/2} + \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{\sqrt{2}} y^{3/2} - \frac{3}{4} y^2 - \frac{2}{5\sqrt{2}} y^{5/2} + \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = 2\pi\, \frac{11}{15} = \frac{22}{15}\pi \ .$$